**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

**Први разред – А категорија**

**1.** Ако су $a$, $b$ и $c$ природни бројеви такви да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 7, доказати да број $30^b + 3^c + 2018^a$ није дељив са 7.

**2.** Наћи све цифре $n$ и 2018-тоцифрене природне бројеве $x$, $x = \overline{a_{2017} \dots a_2 a_1 a_0}$, такве да важи

$$n \cdot x = \overline{(a_{2017}+n) \dots (a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}.$$

**3.** Кружница уписана у $\triangle ABC$ додирује странице $BC$, $CA$ и $AB$ у тачкама $D$, $E$ и $F$, редом. Уочена је тачка $K$ са исте стране праве $EF$ као и тачка $A$, и притом важи $\measuredangle KFE = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle KEF = \measuredangle ABC$. Доказати: $KD \perp BC$.

**4.** За скуп $X$, означимо $\mathscr{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$. (На пример: $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$, јер су подскупови скупа $\{1\}$ скупови $\varnothing$ и $\{1\}$; $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, јер скуп $\varnothing$ има тачно један подскуп, и то је $\varnothing$.) Са $\mathscr{P}^n(X)$ означавамо израз $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\dots\mathscr{P}(X)\dots))$, где је $\mathscr{P}$ примењено $n$ пута. Наћи све двоелементне подскупове $A$ скупа $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{2018} \mathscr{P}^n(\varnothing)$ такве да важи $A \subseteq \mathscr{P}(A)$.

**5.** Максим и Мина играју игру „Шампиони доколице“. Најпре Максим повлачи једну праву у равни, затим Мина повлачи праву различиту од претходно повучене, па онда опет Максим повлачи праву различиту од две претходно повучене, и тако наизменично. Игра се завршава када буде повучено укупно 18 правих (јасно, последњу ће повући Мина). Максим побеђује уколико постоји више од 100 различитих пресечних тачака повучених правих, а Мина побеђује у супротном (тј. ако има 100 или мање таквих тачака). Ко има победничку стратегију?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

## Други разред – А категорија

**1.** У зависности од реалног параметра $a$, решити једначину

$$\sqrt{2x-a}-\sqrt{x-1}=2$$

у скупу реалних бројева.

**2.** Новица на тренингу гађа кош. За сваки погодак добија 1 поен, а за сваки промашај одузима му се $k$ поена, где је $k$ фиксиран природан број. (На почетку има 0 поена, а број освојених поена у неком тренутку током тренинга може бити и негативан.) На крају тренинга Новица је имао $k$ поена. Ако је познато да је Новица погодио у више од 75% а мање од 80% од укупног броја бацања, одредити $k$.

**3.** Дат је $\triangle ABC$, чији је ортоцентар $H$, а $M$ је средиште странице $BC$. За подножје нормале $N$ из $H$ на $AM$ важи $AN=3MN$. Доказати: $AM=BC$.

**4.** Претпоставимо да се сви позитивни делиоци природног броја $n$ (укључујући 1 и $n$) могу поделити у дисјунктне парове на такав начин да је збир бројева у сваком пару прост број. Доказати да су овако добијени прости бројеви међусобно различити.

**5.** Број зовемо *мегапрост* ако је прост, свака цифра му је прост број и збир цифара му је прост број. Доказати да мегапростих бројева са 2018 цифара има мање од $11\cdot 4^{2015}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

## Трећи разред – А категорија

**1.** Одредити најмању вредност функције

$$f(x) = \frac{x^2}{x-9}$$

на интервалу $x \in (9, \infty)$.

**2.** У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 4 = 4(x+3)^y.$$

**3.** Нека су $BE$ и $CF$ висине оштроуглог $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, а $M$ и $N$, редом, средишта дужи $BC$ и $EF$. Доказати да центар кружнице описане око $\triangle AMN$ лежи на правој кроз $A$ паралелној правој $BC$.

**4.** Наћи све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоје међусобно различити реални бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ такви да су испуњена следећа два услова:

- када се сваки од ових $n$ бројева замени збиром преосталих $n-1$ бројева (свих осим њега), добија се исти скуп бројева;
- не постоји подела ових $n$ бројева на два дисјунктна непразна скупа таква да су суме $(n+1)$-их степена елемената тих скупова међусобно једнаке.

**5.** Компјутерски чип се састоји од $n$ транзистора. Неки транзистори су повезани водовима. За свака два транзистора $x$ и $y$ важи: уколико $x$ и $y$ нису повезани водом, тада из транзистора $x$ и $y$ укупно полази бар $n-1$ водова. Доказати да укупан број водова износи бар $\frac{\binom{n}{2}}{2}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

**Четврти разред – А категорија**

**1.** Нека је $S$ непразан скуп чији су сви елементи прости бројеви, и нека је испуњено: за све $p, q \in S$ (не обавезно различите) бар један прост фактор броја $pq+1$ такође је у скупу $S$. Доказати да се у скупу $S$ налази бар један прост број облика $4k+1$.

**2.** Постоји ли реалан број $x$ за који важи

$$\cos x < \cos 2x < \cos 4x \quad ?$$

**3.** Дат је једнакокраки $\triangle ABC$, $AB = AC$. Нека је $k$ његова описана кружница, с центром у тачки $O$. На краћим луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ дате су тачке $X$ и $Y$, респективно, такве да важи $\measuredangle XBA = \measuredangle YAC$. Нека је $X'$ тачка осносиметрична тачки $X$ у односу на праву $AB$, и нека је $Y'$ тачка осносиметрична тачки $Y$ у односу на праву $AC$. Доказати: $OX' = OY'$.

**4.** Дата је празна табла $2018 \times 2018$. Играчи А и Б наизменично, почев од играча А, бирају по једну колону на табли (која не сме бити скроз попуњена) и на прво празно поље (гледано одозго надоле) уписују једну цифру од 0 до 9. Притом на пољима у првој врсти и у првој колони не сме бити уписана цифра 0. Након $2018^2$ потеза, цифре у свакој врсти образују по један 2018-тоцифрен број, и цифре у свакој колони образују по један 2018-тоцифрен број. Играч А побеђује ако су бар два од ових 4036 бројева проста, а играч Б побеђује у супротном. Који играч има победничку стратегију?

**5.** Наћи све природне бројеве $m$ и $k$ такве да се исписивањем бројева $m!$ и $k!$ једног иза другог добија факторијал неког природног броја.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

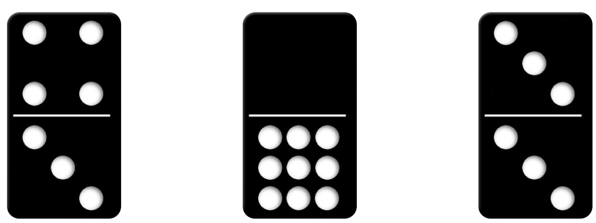
**24. фебруар 2018.**

## Први разред – Б категорија

**1.** Дат је $\triangle ABC$, над чијом је страницом $AC$ као над пречником конструисана кружница $k$. Кружница $k$ пролази кроз средиште странице $BC$, а страницу $AB$ сече у тачки $D$ таквој да важи $AD = \frac{3}{2}DB$. Ако важи $AC = 60$, израчунати површину $\triangle ABC$.

**2.** На страницама $AB$ и $BC$ паралелограма $ABCD$ одабране су тачке $K$ и $M$, редом, такве да важи $AK : KB = 2 : 3$ и $BM : MC = 2 : 1$. Наћи однос површина $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$, тј. израчунати вредност $\dfrac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)}$.

**3.** Комплет од 55 домина садржи све могуће комбинације два броја од 0 до 9, укључујући и домине на којима је два пута исти број. (На слици су приказане три домине: домина која садржи бројеве 3 и 4, домина која садржи бројеве 0 и 9, и домина која садржи два пута број 3.) Колико тачкица има укупно у целом комплету домина?



**4.** Нека су $a$, $b$ и $c$ природни бројеви.

a) Ако су $ab$ и $bc$ кубови природних бројева, доказати да је и $a^2c$ куб природног броја.

b) Ако су $a^4b$, $b^8c^5$ и $c^7a$ кубови природних бројева, доказати да су $a$, $b$ и $c$ кубови природних бројева.

**5.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$|x - |2x - |3x - 1||| = 1.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

## Други разред – Б категорија

**1.** Колико постоји четвороцифрених природних бројева који се могу записати помоћу цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ако све цифре морају бити различите и збир цифара треба да износи 15?

**2.** Кружница $k$ уписана у трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$, додирује страницу $AB$ у тачки $E$. Ако важи $AE = 15$, $BE = 10$ и $CD = 8$, одредити полупречник кружнице $k$.

**3.** Наћи најмањи природан број $n$ такав да број $n^2$ почиње са 2019 (тј. да важи $n^2 = 2019\ldots$).

**4.** У зависности од реалног параметра $a$, решити једначину

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

у скупу реалних бројева.

**5.** Попуњавање таблице $3 \times 3$ бројевима од 1 до 9 називамо *магични квадрат* ако је сваки број искоришћен тачно једном, и притом су збирови у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале сви међусобно једнаки. Одредити колико постоји различитих магичних квадрата $3 \times 3$. (Два магична квадрата сматрамо различитим ако бар на једном пољу имају уписане различите бројеве.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

## Трећи разред – Б категорија

**1.** На шаховском турниру учествује $n$ шахиста. Свако је са сваким одиграо по $k$ партија. Одредити све могуће вредности за $n$ и $k$ ако су укупно одигране 224 партије.

**2.** Колико решења једначине

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$$

лежи у интервалу $[2, 24]$?

**3.** Решити систем једначина

$$a + b = 8;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 32$$

у скупу реалних бројева.

**4.** Основа пирамиде $SABCD$ је ромб $ABCD$, са углом од $60^\circ$ у темену $A$. Дужина бочне ивице $SA$ је једнака дужини странице тог ромба. Доказати:

$$SB^2 + SD^2 = SC^2.$$

**5.** Доказати да једначина

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 3} = 2017$$

нема решења у скупу целих бројева.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**24. фебруар 2018.**

### Четврти разред – Б категорија

**1.** Одредити површину фигуре која је у Декартовом координатном систему одређена неједначинама:

$$x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1);$$
$$y \leqslant \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

**2.** Одредити колико постоји тројки $(a, b, c)$ природних бројева не већих од 2018 таквих да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 3.

**3.** На страници $BC$ једнакостраничног $\triangle ABC$ уочена је тачка $M$. Доказати:

$$MB \cdot MC = AB^2 - AM^2.$$

**4.** Таблица $n \times n$ попуњава се бројевима 1, 0 и $-1$ на такав начин да збирови бројева у свакој врсти и у свакој колони (укупно $2n$ таквих збирова) сви буду међусобно различити. Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 3$;
b) $n = 4$?

**5.** У зависности од реалног параметра $a$, испитати колико различитих реалних решења има једначина

$$x^3 - 3x = a.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.